ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
Δευτέρα 10 Ιουνίου 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

Α1.α) Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ 15.
Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το A** μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.

β) Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι $1-1$,τότε έχει αντίστροφη. (σελ 35 σχολικό βιβλίο)

γ) Εφόσον ισχύουν οι προϋποθέσεις του προηγουμένου τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g: f(A) \to \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

– έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f,

– έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και

– ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$.

Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y, τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f. Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1}. Επομένως έχουμε $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ οπότε $\boldsymbol{f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A}$ και $\boldsymbol{f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in f(A)}$.

Α2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0)=0$.
(σελ 142 σχολικό βιβλίο)

Α3. Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x)>0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$.

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

Α4.α) Ο ισχυρισμός είναι λάθος .
Αιτιολόγηση :

Η γνωστή συνέπεια του θεωρήματος μέσης τιμής καθώς και το πόρισμά του ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-1\ , & x<0\\ 1\ , & x>0\end{cases}$.

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. (σελ 134 σχολικό βιβλίο)

β) Ο ισχυρισμός είναι λάθος
Αιτιολόγηση:

Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{αν} \quad x\neq 1\\ 3, & \text{αν} \quad x=1\end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 1, αφού

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2,\quad \text{ενώ}\quad f(1)=3.$$ (σελ 71 σχολικό βιβλίο)

Α5. Σωστή επιλογή είναι η γ)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\lambda\right)=2 \Leftrightarrow 0+\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=2$, αφού

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} \underset{\text{οπότε } y\to-\infty}{\overset{\text{θέτω} -x=y}{=}} \lim_{y\to-\infty} e^{y}=0.$$

B2. Θεωρώ τη συνάρτηση g με $g(x) = f(x) - x = e^{-x} - x + 2,\ x \in [2,3]$.

Η g συνεχής στο $[2,3]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.

$$\left.\begin{aligned} g(2) &= e^{-2} - 2 + 2 = e^{-2} > 0 \\ g(3) &= e^{-3} - 3 + 2 = \frac{1}{e^3} - 1 = \frac{1-e^3}{e^3} < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow g(2)\cdot g(3) < 0$$

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2,3)$ ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0$.

Επίσης $g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ για κάθε $x \in [2,3]$. Άρα η g γνησίως φθίνουσα, οπότε η $x = x_0$ ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΛΥΣΗ.

B3. $f'(x) = -e^{-x} < 0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και 1 – 1 και αντιστρέφεται. Για να προσδιορίσουμε την f^{-1} λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x.

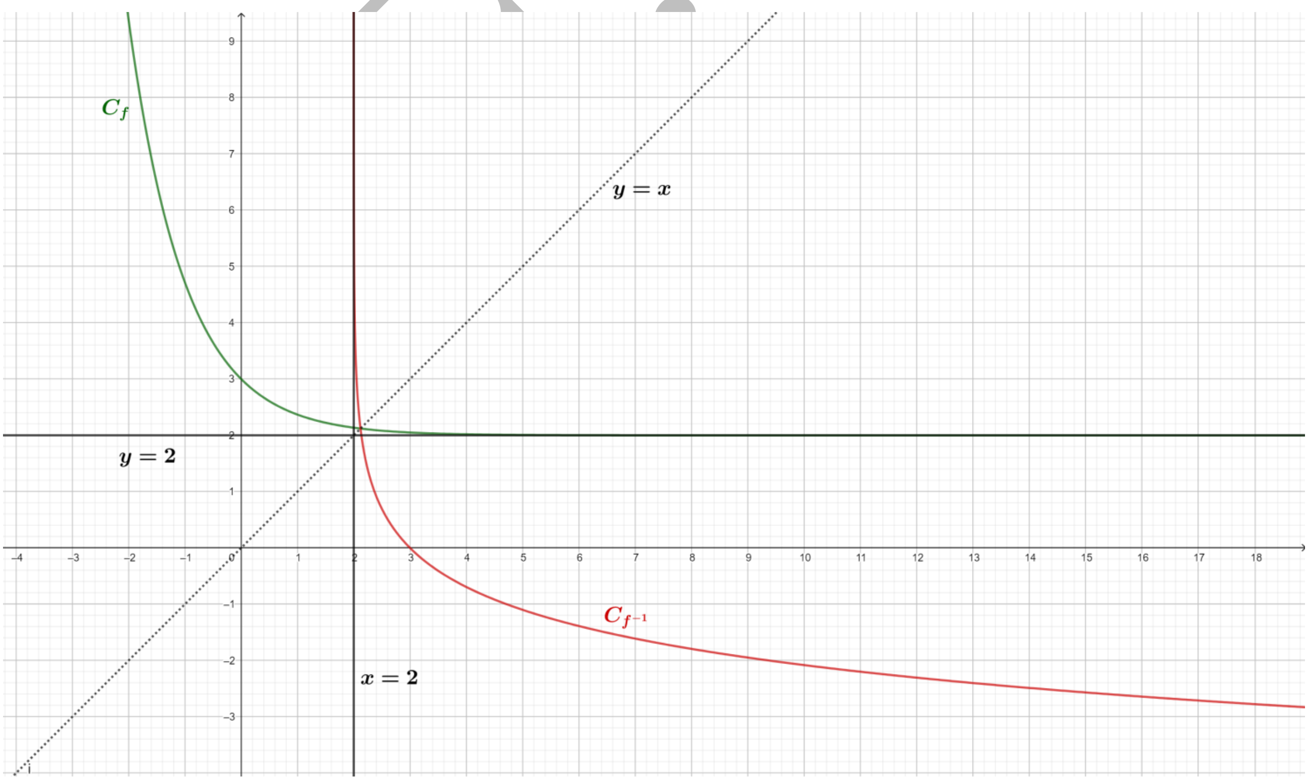
$$y = f(x) \Leftrightarrow y = e^{-x} + 2 \overset{y>2}{\Leftrightarrow} y - 2 = e^{-x} \Leftrightarrow -x = \ln(y-2) \Leftrightarrow x = -\ln(y-2).$$

Άρα $f^{-1}(x) = -\ln(x-2),\ x > 2$.

B4. Ελέγχουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες:

$$\lim_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(-\ln(x-2)\right) \underset{y\to 0^+}{\overset{x-2=y}{=}} \lim_{y\to 0^+}(-\ln y) = +\infty.$$

Άρα η $x = 2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στους πραγματικούς αριθμούς θα είναι και συνεχής στο πεδίο ορισμού της. Άρα f συνεχής στο $x_0 = 1$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$, (1)

Αφού $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1 + a$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1+\beta$, $f(1) = 1+\alpha$ λόγω της (1) θα είναι $\alpha = \beta$.

Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη απαιτώ $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ (2)

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+a-1-a}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$

και $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{e^{\chi-1}+\beta\chi-1-a}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{e^{\chi-1}+\alpha x-1-\alpha}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{e^{\chi-1}-1}{x-1} + \dfrac{\alpha(\mathrm{x}-1)}{x-1}\right) = 1+\alpha$

αφού $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{e^{\chi-1}-1}{x-1} \underset{dlh}{\overset{0/0}{=}} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{e^{\chi-1}}{1} = 1$.

Επομένως η (2) δίνει , $1+\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1.$ Τέλος, αφού $\alpha = \beta$ θα είναι και $\beta = 1$.

Γ2. Αν $x > 1$, τότε $f'(x) = 2x > 0.$ Αν $x < 1$, τότε $f'(x) = e^{x-1}+1 > 0$, $f'(1) = 2$. Ακόμη, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για το σύνολο τιμών της συνάρτησης θα ισχύει

$f(\mathbb{R}) \underset{\text{γνησίως αύξουσα}}{\overset{\text{συνεχής}}{=}} (\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$, αφού,

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{x}^2+1) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^{x-1}+x) \underset{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}{\overset{x-1=y}{=}} +\infty$

Γ3.i. Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{f(x)} = -\infty$ θα υπάρχει αριθμός $\kappa < 0$, ώστε $f(\kappa) < 0$. $f(0) = \mathrm{e}^{-1}$,

και αφού η f είναι συνεχής στο $[\kappa, 0]$ θα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο παραπάνω διάστημα. Θα υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\kappa, 0) \subseteq (-\infty, 0)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Αν τώρα $x > 0$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα προκύπτει $f(x) > f(0) = 0$. Άρα x_0 μοναδική ρίζα.

ii. <u>α τρόπος:</u> $f^2(x) - x_0 \cdot f(x) = 0$ (1)

Έστω ότι υπάρχει ρίζα $x_1 \in (x_0, +\infty)$ της (1) τότε $f^2(x_1) - x_0 \cdot f(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1)\cdot(f(x_1) - x_0) = 0$.

- $f(x_1) = 0$ ΑΤΟΠΟ, γιατί μοναδική ρίζα της f είναι το x_0.
- $f(x_1) = x_0 < 0$

  $\rightarrow$ Αν $x_1 \in (x_0, 1)$ τότε $f(x_1) = x_0 \Leftrightarrow e^{x_1-1} + x_1 = x_0$. Όμως,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 > x_0 \\ e^{x_1-1} > 0 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} e^{x_1-1} + x_1 > x_0 \text{ ΑΤΟΠΟ.}$$

→ Αν $x_1 \in [1,+\infty)$ τότε $f(x_1) = x_0 \Leftrightarrow x_1^2 + 1 = x_0$. Όμως,

$$\left.\begin{array}{r} x_1 \geq 1 \Leftrightarrow x_1^2 \geq 1 \Leftrightarrow x_1^2 + 1 \geq 2 \\ x_0 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ ΑΤΟΠΟ.}$$

Άρα η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$.

<u>β τρόπος:</u> $f^2(x) - x_0 \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot (f(x) - x_0) = 0$

Άρα $f(x) = 0$ ή $f(x) = x_0$ (1).

Η (1) είναι αδύνατη διότι:

$$\left.\begin{array}{l} \text{αν } x > x_0 \overset{f \text{ γνωσίως αύξουσα}}{\Rightarrow} f(x) > f(x_0) \\ \qquad\qquad \text{όμως } f(x_0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) > 0 > x_0. \text{ Άρα } f(x) - x_0 > 0.$$

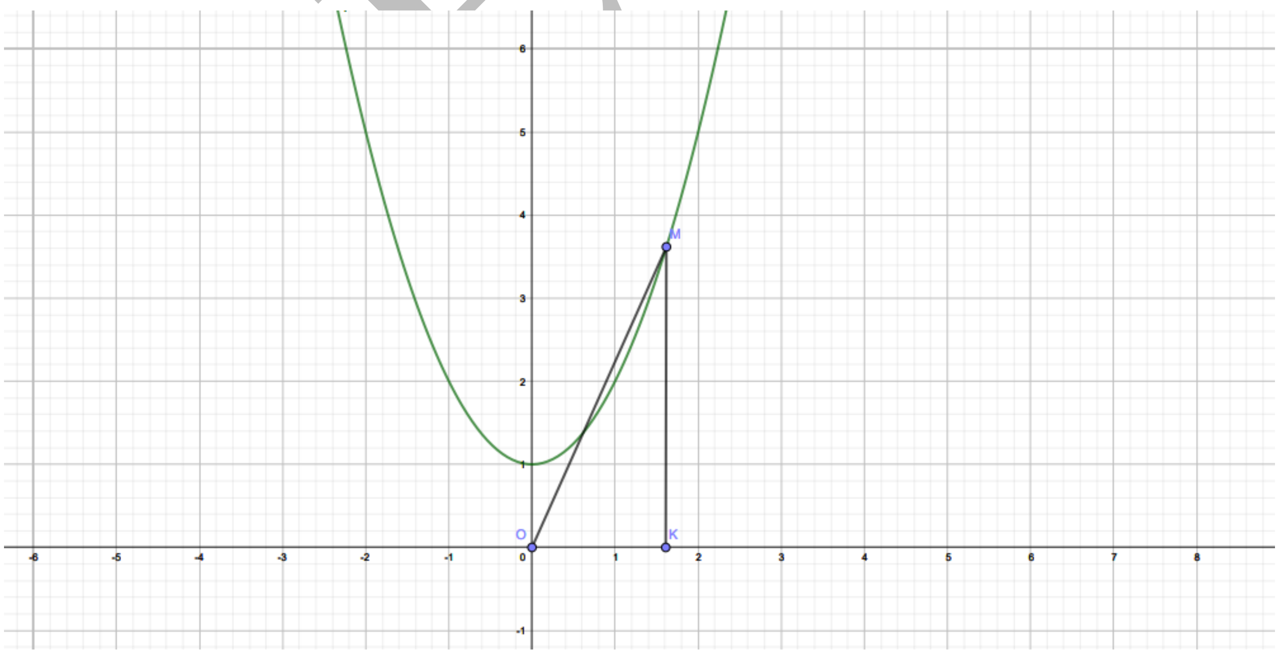
Συνεπώς $f(x) = 0$, η οποία από **(Γ3.i.)** έχει μοναδική λύση την $x = x_0 \notin (x_0,+\infty)$.

Άρα η εξίσωση $f^2(x) - x_0 \cdot f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$.

Γ4. $\mathrm{E} = \dfrac{\mathrm{OK} \cdot \mathrm{MK}}{2} = \dfrac{x(x^2+1)}{2} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{x}^3 + \mathrm{x})$**,** αφού $\mathrm{E} = \mathrm{E(t)}$ τότε $\mathrm{E(t)} = \dfrac{1}{2}((\mathrm{x(t)})^3 + \mathrm{x(t)})$ άρα

$$\mathrm{E'(t)} = \frac{1}{2}((\mathrm{x(t)})^3 + \mathrm{x(t)})' = \frac{1}{2}(3(\mathrm{x(t)})^2 \cdot \mathrm{x'(t)} + \mathrm{x'(t)}).$$

Την χρονική στιγμή $\mathrm{t} = \mathrm{t}_0$ ισχύει $\mathrm{E'(t_{\it o})} = \dfrac{1}{2}(3(\mathrm{x(t_{\it o})})^2 \cdot \mathrm{x'(t_{\it o})} + \mathrm{x'(t_{\it o})}) = \dfrac{1}{2}(6(\mathrm{x(t_{\it o})})^2 + 2) = 28\tau\mu / \mathrm{sec}$.



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. **<u>α τρόπος:</u>** $f(x)=(x-1)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)+\alpha x+\beta$

$$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+(x-1)\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\alpha \Leftrightarrow f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+\alpha.$$

Εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(1,1)$: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Leftrightarrow y-(\alpha+\beta)=\alpha\cdot(x-1)\Leftrightarrow$

$$y=\alpha x-\alpha+\alpha+\beta \Leftrightarrow y=\alpha x+\beta.$$

Αφού η $y=-x+2$ εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(1,1)$ έχουμε $\alpha=-1$ και $\beta=2$.

<u>β τρόπος:</u> $f(x)=(x-1)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)+\alpha x+\beta$

$f(1)=1\Leftrightarrow \alpha+\beta=1$

$$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+(x-1)\cdot\frac{1}{x^2-2x+2}\cdot(2x-2)+\alpha$$

$f'(1)=-1\Leftrightarrow \alpha=-1$

Άρα $\beta=1-\alpha=2$.

Δ2. $f(x)=(x-1)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2 \Leftrightarrow f(x)+x-2=(x-1)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)$

Για το $x^2-2x+2=x^2-2x+1+1=(x-1)^2+1\geq 1$. Άρα $\ln\left(x^2-2x+2\right)\geq 0$.

Για $1\leq x\leq 2$ έχουμε $(x-1)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει για $x=1$. Έστω Ε το ζητούμενο εμβαδόν. $\mathrm{E}=\int_1^2 (x-1)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)dx$.

Θέτω $x-1=y$ οπότε $dx=dy$. Για $x=1$: $y=0$ και $x=2$: $y=1$.

$$\mathrm{E}=\int_0^1 y\cdot\ln\left(y^2+1\right)dy=\left[\frac{y^2}{2}\cdot\ln\left(y^2+1\right)\right]_0^1-\int_0^1\frac{y^2}{2}\cdot\frac{2y}{y^2+1}dy=\frac{1}{2}\cdot\ln 2-\int_0^1\frac{y^3}{y^2+1}dy=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\ln 2-\int_0^1\left(y-\frac{y}{y^2+1}\right)dy=\frac{1}{2}\cdot\ln 2-\int_0^1 y\,dy+\int_0^1\frac{y}{y^2+1}dy=\frac{1}{2}\cdot\ln 2-\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1+\frac{1}{2}\cdot\left[\ln\left(y^2+1\right)\right]_0^1=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\ln 2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\ln 2=\ln 2-\frac{1}{2}\ \tau.\mu.$$

Δ3. i. Ισχύει $f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1\geq -1$. Η ισότητα ισχύει για $x=1$.

ii. **<u>α τρόπος:</u>** $f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\cdot\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\frac{3}{2}\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq f(\lambda)+\lambda-2+\frac{3}{2}\Leftrightarrow$

$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f(\lambda)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda+\frac{1}{2}\geq f(\lambda)+\lambda.$ Θεωρώ τη συνάρτηση k με

$k(x)=f(x)+x,\ x\in\mathbb{R}.$ Τότε $k'(x)=f'(x)+1\overset{(\mathrm{i})}{\geq}0$ και k συνεχής στο $\mathbb{R}.$ Άρα η k είναι γνησίως αύξουσα, αφού $\lambda+\frac{1}{2}>\lambda.$

<u>β τρόπος:</u> Η ανισοτική σχέση που ζητείται να αποδειχθεί μπορεί να προκύψει εφαρμόζοντας Θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση f στο $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$.

Δ4. Έστω $\left(x_{\mathrm{A}},f\left(x_{\mathrm{A}}\right)\right)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης της C_f και $\left(x_{\mathrm{B}},\mathrm{g}\left(x_{\mathrm{B}}\right)\right)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης της C_g. Για να έχουν κοινή εφαπτομένη θα πρέπει $f'\left(x_{\mathrm{A}}\right)=g'\left(x_{\mathrm{B}}\right)$.
Από **(Δ3. i.)** ισχύει $f'\left(x_{\mathrm{A}}\right)\geq-1$ για κάθε $x_{\mathrm{A}}\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x_{\mathrm{A}}=1$.
Επιπλέον, η $g'\left(x_{\mathrm{B}}\right)=-3{x_{\mathrm{B}}}^2-1\leq-1$ για κάθε $x_{\mathrm{B}}\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x_{\mathrm{B}}=0$.
Άρα $f'\left(x_{\mathrm{A}}\right)\geq-1\geq g'\left(x_{\mathrm{B}}\right)$ για κάθε $x_{\mathrm{A}},x_{\mathrm{B}}\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x_{\mathrm{A}}=1$ και $x_{\mathrm{B}}=0$.
Στο $x_{\mathrm{A}}=1$ η εφαπτομένη της C_f είναι η $y=-x+2$ από υπόθεση. Η εφαπτομένη της C_g στο $x_{\mathrm{B}}=0$ είναι η $y-g(0)=g'(0)\cdot(x-0)\Leftrightarrow y-2=-1\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=-x+2.$
Συνεπώς, μοναδική κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g είναι η $y=-x+2$.